5

Inekuazioak

Helburuak

Hamabostaldi honetan hauxe ikasiko duzu:

- Ezezagun bateko lehen eta bigarren mailako inekuazioak ebazten.
- Ezezagun bateko ekuazio-sistemak ebazten.
- Modu grafikoan bi ezezaguneko lehen mailako inekuazioak ebazten.
- Modu grafikoan bi ezezaguneko lehen mailako inekuazio-sistemak ebazten.
- Inekuazioekin problemak planteatzen eta ebazten.

Hasi baino lehen

Koka zaitezen

Inekuazioak maiz nahasketa-problemak ebazteko erabiltzen dira. Hemen, zure kabuz ikertzeko problema bat proposatzen zaizu. 4. kapituluan duzu ebazpena, zeuk bakarrik aurkitzerik izan ez baduzu.

Ardo-saltzaile batek bi ardo mota dauzka biltegian: batak 4 € balio du litroko eta, besteak berriz, 7 € litroko. Nahastu egin nahi ditu 500 litroko upela betetzeko eta nahasketak litroko 6€ eta 5€ artean balio izatea nahi du. Bila ezazu zein balioren artean egon behar duen lehen motako ardoaren litro kopurua, azken prezioa nahi den tartean egon dadin.

Erantsitako irudietan problemaren ebazpenetik gertu dauden bi egoera aurkezten dira. Erabili kalkulagailua emaitzak ebazpenaren benetako baliora gehiago hurbiltzen saiatzeko.

1. Ezezagun bateko 1. mailako inekuazioak

Definizioak

Desberdintasuna Ondoko ikurretako bat erabiltzen duen edozein adierazpen desberdintasuna da:

< (txikiagoa), > (handiagoa)
≤ (txikiagoa edo berdina), ≥ (handiagoa edo berdina)

Adibidez:

2<3 (bi 3 baino txikiagoa da)
7>π (zazpi pi baino handiagoa da)
x≤5 (x 5 baino txikiagoa edo verdina da)

Inekuazioa adierazpen aljebraikoen arteko **desberdintasuna** da. Hemen lehen mailakoak bakarrik ikasiko ditugu.

Lehen mailako inekuazioa bi kideak 1. mailako edo maila txikiagoko polinomioak diren inekuazioa da.

Inekuazio baten **ebazpenak** inekuazio hori egiazko bihurtzen duten zenbaki erreal guztiak dira.

Inekuazio baliokideak

Geroago ikusiko dugun inekuazioak ebazteko prozesua (ekuazioen kasuan bezala) hasierako inekuazioa errazagoa den baliokide batera aldatzean oinarritzen da.

Bi inekuazioak **baliokideak** direla esaten da ebazpen-multzo bera dutenean.

- ✓ Inekuazio bateko bi atalei kantitate bera gehitzen edo kentzen bazaie, inekuazio baliokidea lortzen da.
- ✓ Inekuazio bateko bi atalak kantitate berarekin biderkatzen edo zatitzen badira, inekuazio baliokidea lortzen da, desberdintasunaren zentzu berean aipatu kantitatea positiboa bada, eta aurkako zentzuan aipatu kantitatea negatiboa bada.

Desberdintasunak egiazkoak **edo faltsuk** izan daitezke.

Adibidez:

2 < 2 egiazko desberdintasuna da.
2 > 3 desberdintasun faltsua da

X < 5 bada desberdintasun bat, x-ren zenbait baliotan egiazkoa izan daitekeena eta veste batzuetan, berriz, faltsua.

Desberdintasun ikurren alde bietan agertzen diren zenbaki edo adierazpenak desberdintasunaren **kideak** deitzen dira.

Gogora ezazu izen hau ere erabiltzen dela berdintasunetan eta ekuazioetan.

Una **inecuación** es una desigualdad cuyos miembros

Inekuazioa kidetzat adierazpen aljebraikoak dituen desberdintasuna da.

Adibidez:

$3x + 7y < 5$, $x^2 - 3x + 5 \geq 0$, $\dfrac{3-x}{2+x+y} < 5 - xy$

Inekuazioaren bi kideak polinomioak baldin badira, esango dugu **inekuazioa polinomikoa** dela.

Lehenengo bi adibideak mota honetakoak dira, hirugarrena, berriz, ez.

Polinomio biak ez badira 1 baino maila handiagokoak, lehen mailako **inekuazioaz ari gara**

Lehen adibidea mota honetakoa da.

Bigarren adibideak ezezagun bat dauka; besteek bi dituzte.

Resolver una inecuación es encontrar todos los números

Inekuazio bat **ebaztea** Inekuazioa egiazko egiten duten zenbaki erreal guztiak aurkitzea da. Zenbaki horiei inekuazioaren **ebazpenak** deituko diegu.

Ekuazioak ez bezala, inekuazio batek ebazpen infinituak izan ohi ditu, hortaz, ebazpen horien multzoa irudikatzeko ikasgaien lehenengo atalean erabilitako tarteen idazkera erabili ohi da.

Adibidez, 2x < 6 inekuazioa ematen badigute, ebazpenak modu hauetako edozeinetan adieraziko dira:

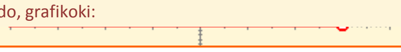
{xεR/x<3}

3 baino txikiagoak diren zenbaki erreal guztien multzoa, edo

{xε(-∞,3)

Adierazitako tarteari dagozkion zenbakiak

Edo, grafikoki:



$-2x - 2 \geq -3$

Bi atalei 2 gehituko diegu. Ondorengoa geratzen da:

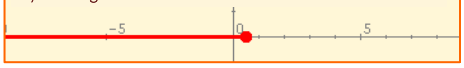
$-2x \geq -1$

Kideak zatitzen ditugu zati -2 eta hau geratzen da:

$x \leq \frac{-1}{-2} = 0{,}50$

Ebazpenak:

a) Multzo gisa: **{ x ε R /x ≤ 0,50 }**
b) Tatre gisa: **{ -∞,0,50 }**
c) Modu grafikoan:



$-1x + (-1) \geq -1x + (-3)$

-1 Bi kideei -1 batu eta hau geratzen da:

$0 \geq -2$

Hau beti egiazkoa denez,
Ebazpenak zenbaki erreal guztiak dira.

Ebazpenak:
a) Multzo gisa: {xεR}
b) Tarte gisa: (-∞,+∞)

Ebazpena

Prozesu hau hasierako inekuazioa beste baliokide errazago batzuetara aldatuz joatean datza, azken emaitza honako hau izan arte:

$$x < k\,,\; x \leqslant k\,,\; x > k\,,\; x \geqslant k$$

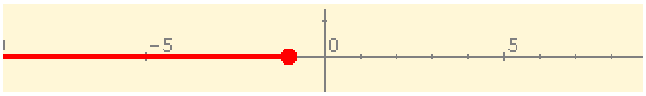
edo azken emaitza kontrajarria izan arte, kasu horretan inekuazioak ez du ebazpenik.

ADIBIDEA: **$x+2 \leq 1$**

Bi kideei 2 batu eta hau geratzem da: **$x \leq -1$**

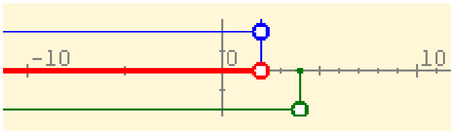
Ebazpen-multzoa era hauetan irudika daiteke iteke:

a) Multzo gisa: $\{x \in \mathrm{IR} \,/\, x \leq -1\}$
b) Tarte gisa: $(-\infty, -1]$
c) Modu grafikoan:



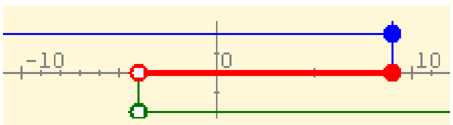
$$\begin{cases} x < 2 \\ x < 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x \in (-\infty, 2) \\ x \in (-\infty, 4) \end{matrix}$$

Sistemaren ebazpenak: $x \in (-\infty, 2)$



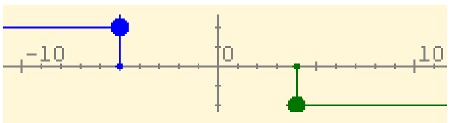
$$\begin{cases} x \leq 9 \\ x > 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x \in (-\infty, 9] \\ x \in (4, +\infty) \end{matrix}$$

Sistemaren ebazpenak: $x \in (4, 9]$



$$\begin{cases} x \leq -5 \\ x \geq 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x \in (-\infty, -5] \\ x \in [4, +\infty) \end{matrix}$$

Sistemaren ebazpenak: **Ez du halakorik**



Inekuazio-sistemak

Lehen mailako inekuazio-sistema lehen mailako 2 inekuazio edo gehiagoren multzoa da.

Ezezagun bateko inekuazio-sistema bat ebazteko, inekuazio bakoitza banan-banan ebazten da. Sistemaren ebazpenak sistemaren inekuazio bakoitza betetzen duten zenbaki erreal guztiek osatzen dituzte.

Sistemaren inekuazio bakoitza modu independentean ebatzi behar da, ondorengo formetako bat hartzen duen arte:

$$x < k\,,\; x \leqslant k\,,\; x > k\,,\; x \geqslant k$$

Bazterrean ezezagun bateko lehen mailako inekuazio-sistemak ebazteko adibide batzuk ikus ditzakezu.

Ebatzitako ARIKETAK

1. Adieraz ezazu, kasuan kasu, inekuazio horietatik (I, II, III, IV) zein den emandakoaren baliokidea:

a) Ondorengo inekuazioa dugula: $-4x \le -3x-5$, adieraz ezazu inekuazio hauetatik zein den haren baliokidea: I) $-x \ge -5$ II) $x \le -5$ III) $x \le 5$ IV) $-x \le -5$

b) Ondorengo inekuazioa dugula: $-9x \le 6$, $-9x \le 6$, adieraz ezazu inekuazio hauetatik zein den haren baliokidea: I) $x \ge -\frac{6}{9}$ II) $x \le -\frac{6}{9}$

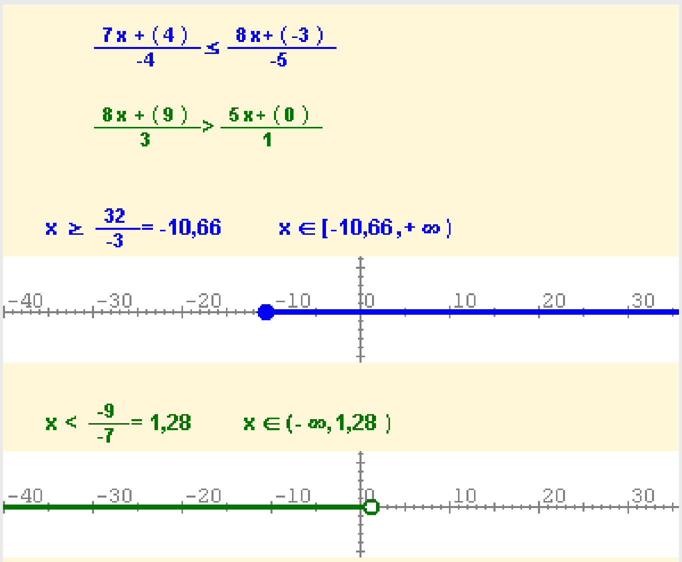
c) Ondorengo inekuazioa dugula: $\frac{-6x-5}{9} \le 5$, adieraz ezazu inekuazio hauetatik zein den haren baliokidea: I) $x \ge -\frac{50}{6}$ II) $x \le -\frac{50}{6}$

2. Ebatz ezazu ondorengo inekuazioa: $\frac{-6x+7}{-3} > \frac{8x-4}{2}$

$$\frac{-6x+7}{-3} > \frac{8x-4}{2} \Leftrightarrow -12x+14 < -24x+12 \Leftrightarrow 12x < -2 \Leftrightarrow x < -\frac{2}{12} = -\frac{1}{6}$$

$$x \in \left(-\infty, -\frac{1}{6}\right)$$

3. Ebatz ezazu ondorengo inekuazio-sistema eta eman itzazu ebazpenak azalpenean adierazi bezala:



Ebazpen komunak −10'66 baino handiagoak edo horren berdinak diren eta, aldi berean, 1,28 baino txikiagoak diren puntuak dira.

Hortaz, sistemaren ebazpenak tarteko puntuak dira.

[-10'66,1'28)

2. Ezezagun bateko 2. mailako inekuazioak

GOGORA EZAZU

Bigarren mailako ekuazio baten ebazpenak

$$ax^2 + bx + c = 0$$

honako formula honek ematen ditu:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

diskriminatzailea, b^2-4ac, zero baino handiagoa edo verdina baldin bada. Eta ebazpen posibleak r1 eta r2 deitzen baditugu, orduan:

$$ax^2 + bx + c = a(x-r1)(x-r2)$$

Diskriminatzailea nulua bada, ebazpen bakarra dago, r, y

$$ax^2 + bx + c = a(x-r)^2$$

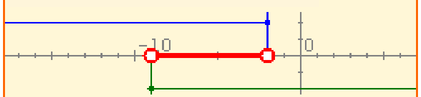
KASUKO ADIBIDEAK 1:

4(x+2)(x+9)<0

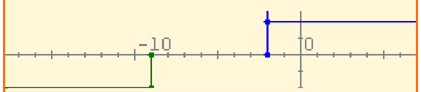
Ondoko sistemen baliokidea da:

$$\begin{cases} x < -2 \\ x > -9 \end{cases} \quad ó \quad \begin{cases} x > -2 \\ x < -9 \end{cases}$$

Lehenengoaren ebazpena: (-9,-2)



Bigarrenak ez du ebazpenik.



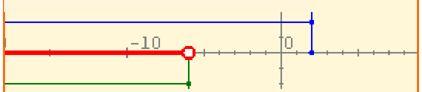
EBAZPENA: (-9, -2)

-8(x-2)(x+6)<0

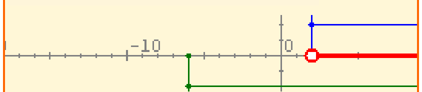
Ondoko sistemen baliokidea da:

$$\begin{cases} x < 2 \\ x < -6 \end{cases} \quad ó \quad \begin{cases} x > 2 \\ x > -6 \end{cases}$$

Lehenengoaren ebazpena: (-∞,-6)



Bigarrenaren ebazpena: (2,+ ∞)



EBAZPENA: (- ∞, -6) ∪ (2, + ∞)

Deskonposaketa bidezko ebazpena

Bigarren mailako inekuazioa ondokoen baliokidea den edozein da:

$ax^2+bx+c<0$, $ax^2+bx+c<=0$

$ax^2+bx+c>0$, $ax^2+bx+c>=0$

a, b eta c zenbaki errealak direla.

Inekuazioaren bereizgarri den polinomioak erro errealak baldin baditu, faktoreetako deskonposaketa erabil daiteke lehen mailako ekuazio-sistema bat bezala ebazteko. Ondorengo kasuak egon daitezke:

KASUA 1: a (x-r1) (x-r2) <0

Hiru faktoreen biderkadura negatiboa izateko horietako batek edo hiruk negatiboak izan behar dute.

- a>0 bada, faktore bat bakarrik izan daiteke negatiboa eta aurreko inekuazioa hurrengo sistemen baliokidea izango da:

$$\left.\begin{matrix} x - r1 < 0 \\ x - r2 > 0 \end{matrix}\right\} \quad ó \quad \left.\begin{matrix} x - r1 > 0 \\ x - r2 < 0 \end{matrix}\right\}$$

- a<0 bada, beste bi faktoreek negatiboak edo positiboak izan behar dute eta aurreko inekuazioa hurrengo sistemen baliokidea izango da:

$$\left.\begin{matrix} x - r1 < 0 \\ x - r2 < 0 \end{matrix}\right\} \quad ó \quad \left.\begin{matrix} x - r1 > 0 \\ x - r2 > 0 \end{matrix}\right\}$$

KASUA 2: a (x-r1) (x-r2) ≤ 0

Aurreko kasuarekin daukan desberdintasun bakarra zera da, oraingoan tarteak itxiak direla.

KASUA 3: a (x-r1) (x-r2) > 0

1. kasuaren itxurakoa.

KASUA 4: a (x-r1) (x-r2) ≥ 0

2. kasuaren itxurakoa.

KASUA 5: a $(x-r)^2 <0$

A>0 inoiz egiazkoa ez baldin bada eta ebazpenik ez badu. A<0 beti egiazkoa baldin bada eta ebazpenean zenbaki guztiak errealak badira.

KASUA 6: a $(x-r)^2 \leq 0$

A>0 bakarrik egiazkoa baldin x=r denean, hortaz, ebazpen multzoak elementu bakar bat izango du. A<0 beti egiazkoa baldin bada eta ebazpenean zenbaki guztiak errealak badira.

KASUA 7: a $(x-r)^2 >0$

5.a bezalakoa da, vaina posizioak alderantziz daudenean.

KASUA 8: a $(x-r)^2 \geq 0$

6.a bezalakoa da, vaina posizioak alderantziz daudenean.

0 ez den beste zenbaki baten karratua beti positiboa da, $(x-3)^2 \geq 0$.

- $-2(x-3)^2<0$ Ebazpena: IR
- $2(x-3)^2 \leq 0$ Ebazpena: x=3
- $2(x-3)^2>0$ Ebazpena: IR
- $-2(x-3)^2>0$ Ez du ebazpenik.

Ebazpen orokorra

Aurreko atalean erabilitako prozedura baliagarria da ateratzen den bigarren mailako polinomioak erro errealak baldin baditu. Bestela, ez digu balio.

Atal honetan prozedura orokorra ikusiko dugu, bigarren mailako edozein inekuazariorako baliagarria, erro errealak izan ala ez.

Prozedura hau polinomioaren irudikapen grafikoa (parabola bat) gorantza edo beherantza zabalik dagoen eta abzisen ardatza mozten duen ala ez jakitean oinarritzen da.

Har dezagun hurrengo polinomioa,

$$ax^2 + bx + c$$

Ikusi duzu bere grafikoa gorantza irekitako parábola dela positiboa denean eta beherantza irekitakoa negatiboa denean.

Polinomioaren **diskriminatzailea ondokoa da:**

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

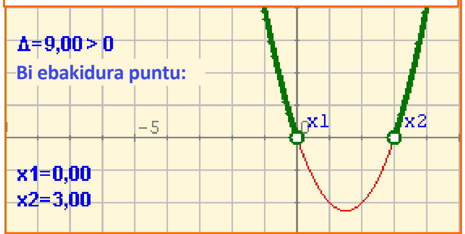
$\Delta>0$ baldin bada, grafikoak X ardatza mozten du bi puntutan (x1 eta x2, bigarren mailako ekuazioaren formulaz lortzen direnak); $\Delta=0$ baldin bada, grafikoak X ardatza puntu bakar batean mozten du eta $\Delta<0$ baldin bada, grafikoak ez du mozten X ardatza.

Ezkerraldean ebazpen grafikoko prozedura hau argitzen duten zenbait adibide ikus ditzakezu.

$x^2-3x>0$

$y=x^2-3x$

a>0 parabola beherantz dago.

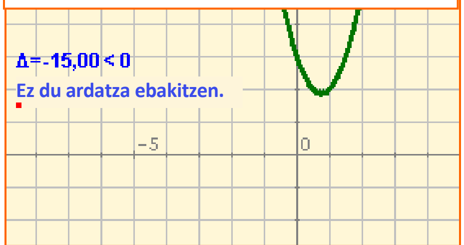


Ebazpena: $(-\infty,0) \cup (3,+\infty)$

$2x^2-3x+3>0$

$y=2x^2-3x+3$

a>0 parabola gorantz dago.

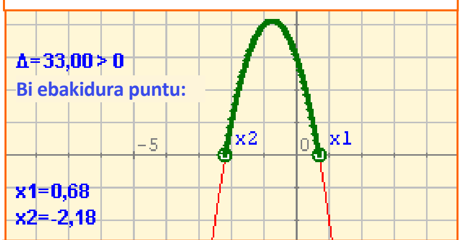


Ebazpenik gabe

$-2x^2-3x+3>0$

$y=-2x^2-3x+3$

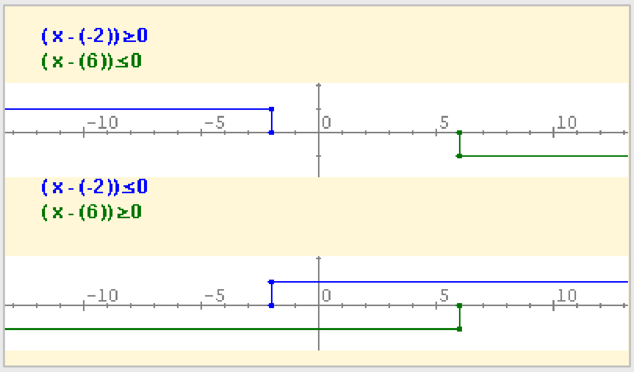
a<0 parabola beherantz dago.



Ebazpena: (-2,18 , 0,68)

Ebatzitako ARIKETAK

4. Ebatzi ondorengo inekuazioa deskonposaketa bidez: $2x^2-8x-24 \le 0$



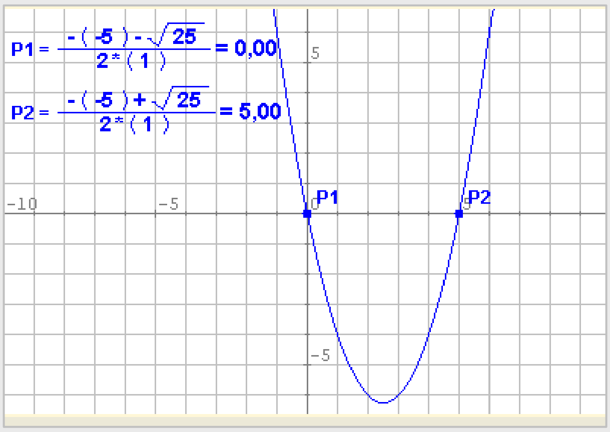
Polinomioaren erroak aurkituko ditugu:

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{64+192}}{4} = \begin{matrix} 6 \\ -2 \end{matrix}$$

Inekuazioa faktoreetan deskonposatuko dugu: 2(x-6)(x+2) ≤ 0.

Inekuazioa ezkerraldeko bi sistemen baliokidea da. Lehenengoak ez du ebazpenik eta bigarrenaren eta gure inekuazioaren ebazpenak tarte itxiko puntuak dira. **[-2,6]**

5. Ebatz ezazu ondorengo inekuazioa grafikoki: $x^2-5x>0$



Polinomioaren erroak aurkituko ditugu:

x (x-5) = 0

Gorantz zabaldutako parabola da (koefiziente nagusia: 1>0); abzisen ardatza x=0 eta x=5 puntuetan ebakitzen du. Hortaz, inekuazioaren ebazpena ondorengoa da:

$$(-\infty,0) \cup (5,+\infty)$$

3. Bi ezezaguneko 1. mailako inekuazioak

Definizioak

Bi ezezaguneko lehen mailako inekuazioa ondoko hauen baliokidea den edozein da:

$ax+by+c<0$ $\qquad$ $ax+by+c \le 0$

$ax+by+c>0$ $\qquad$ $ax+by+c \ge 0$

Kasu honetan, ebazpenak ez dira zenbaki multzoak, baizik eta zenbaki-bikoteen multzoak, beraz, ezin dira irudikatu lerro zuzen batean: planoaren azpimultzo gisa irudikatu behar dira.

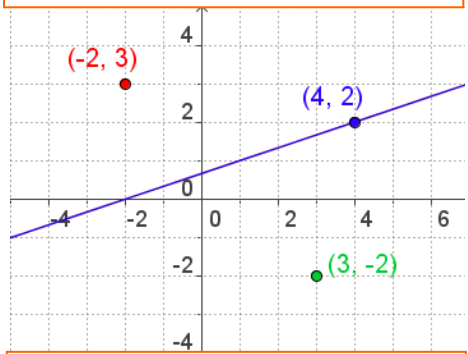
GOGORA EZAZU

$$ax + by + c = 0$$

Planoko **zuzen baten ekuazio orokorra** da.

Hori erabiliko dugu bi dituzten lehen mailako inekuazioak ebazteko

$x-3y+2=0$ zuzenak bi planoerditan banatzen du planoa. Bila ezazu planoko zein lekutan diren edozein punturen koordenatuak zuzenaren ekuazioan ordeztean lortzen diren balioak positiboak, negatiboak edo nuluak.



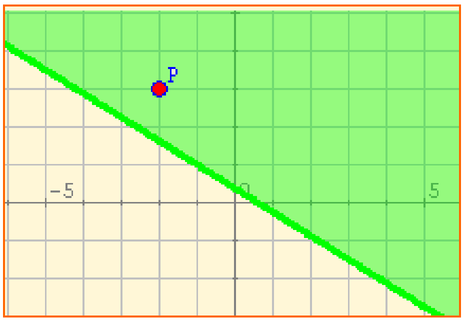
A(4,2)	$4-3\cdot2+2=0$
puntua zuzenean dago	
B(-2,3)	$-2-3\cdot3+2=-7<0$
C(2,-3)	$2-3\cdot(-3)+2=13>0$

Ebazpen grafikoa

Bi ezezaguneko inekuazio baten ebazpena zenbaki-pare bat da $(x0,y0)$, beren balioak ekuazioaren ezezagunean ordezkatzean desberdintasuna egiazko bihurtzen dutenak. Zenbaki errealen bikote bakoitza planoko puntu bat bezala irudika daiteke.

Beraz, **inekuazioa ebaztean desberdintasuna egiaztatzen duten koordenatuak dituzten planoko puntu guztiak lortzen dira.**

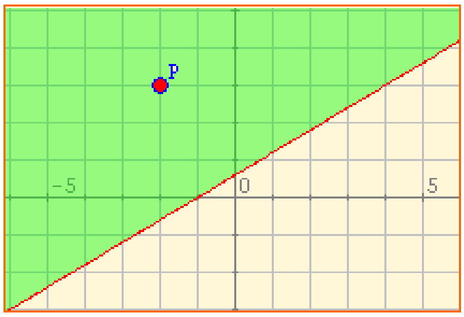
Horretarako, ondorengoa egin behar da: zuzena marrazten da, bertan ez dagoen puntu bat aukeratzen da eta puntuaren koordenatuek desberdintasuna betetzen duten ala ez duten egiaztatzen da. Desberdintasuna betetzen badute, aukeratutako puntua dagoen eremua izango da inekuazioaren ebazpena; bestela, ebazpena beste eremua izango da.



$-5x-8y+3\le 0$ $\qquad$ P(-2,3)

$5\cdot(-2)-8\cdot3+3=-11<0$

Eremu berdea da ebazpena, zuzena barne, desberdintasuna ondorengoa baita: $\le$



$3x-5y+3<0$ $\qquad$ P(-2,3)

$3\cdot(-2)-5\cdot3+3=-18<0$

Eremua berdea da ebazpena.

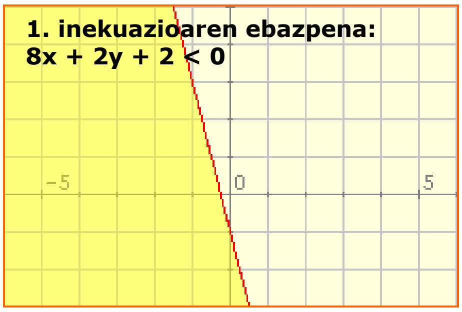
Inekuazio-sistemak

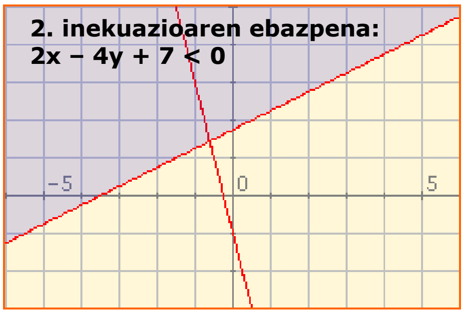
Bi ezezagunetako lehen mailako inekuazio-sistema bi ezezagun dituzten lehen mailako bi inekuaziok edo gehiagok osatutako multzoa da.

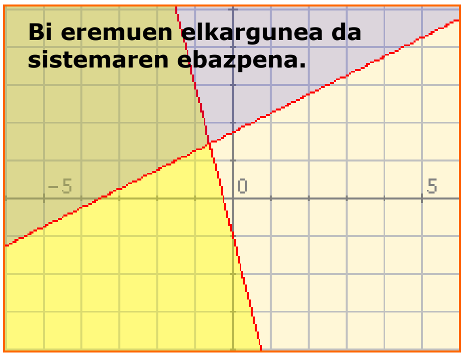
Ezezagun bateko sistemen kasuan bezala, inekuazioak banan-banan ebazten dira eta sistemaren inekuazio guztien ebazpen komun guztien multzoa sistemaren ebazpen-multzoa da.

Begira iezaiezu arretaz garatutako adibideei eta ikus ezazu zenbait kasutan ez dagoela ebazpenik.

$8x + 2y + 2 < 0$
$2x - 4y + 7 < 0$



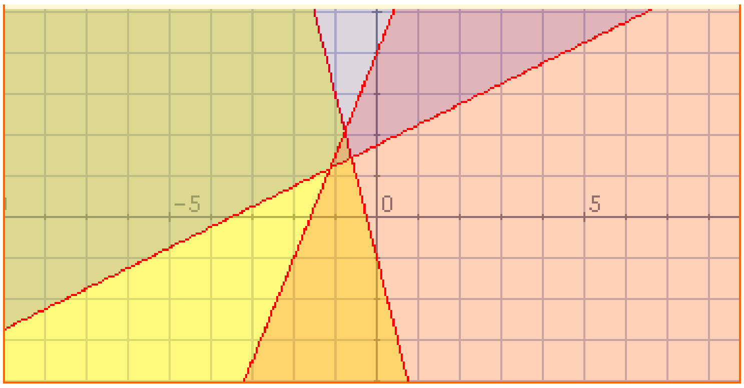




Hirugarren inekuazio bat gehituz gero:

$8x + 2y + 2 < 0$
$2x - 4y + 7 < 0$
$5x - 2y + 8 < 0$

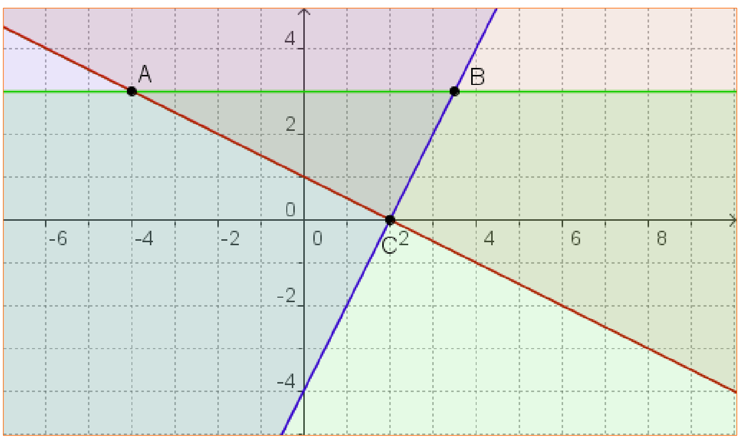
Ebazpena hiru eremuak ukitzen dituen triangelu komuna da



BESTE ADIBIDE BAT

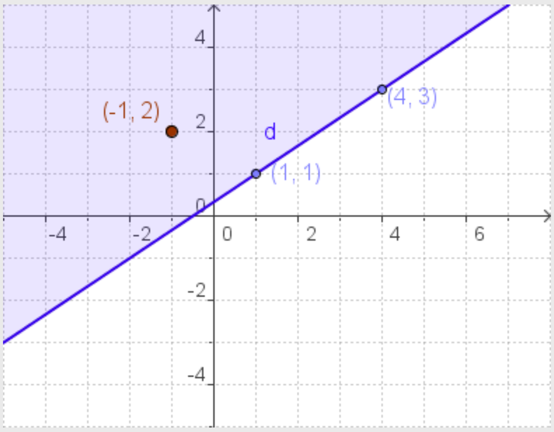
$x + 2y - 2 \geq 0$
$2x - y - 4 \leq 0$
$y - 3 \leq 0$

Ebazpena ABC erpinak dituen triangelua da, hiru eremuak ukitzen dituena



Ebatzitako ARIKETAK

6. Bila ezazu ea P(-1,-2) puntua $-2x + 3y \le 1$ inekuazioaren ebazpenetako bat den. Marraz ezazu ebazpen-erdiplanoa eta adieraz ezazu $-2x + 3y = 1$ zuzena barne hartzen duen ala ez.



Zuzena marrazterakoan bi balio eman diezazkiekegu x-ri eta y-ri. Hala, y-ri dagozkion balioak izango ditugu.

$x=1$ $y=1$ $x=-2$ $y=-1$

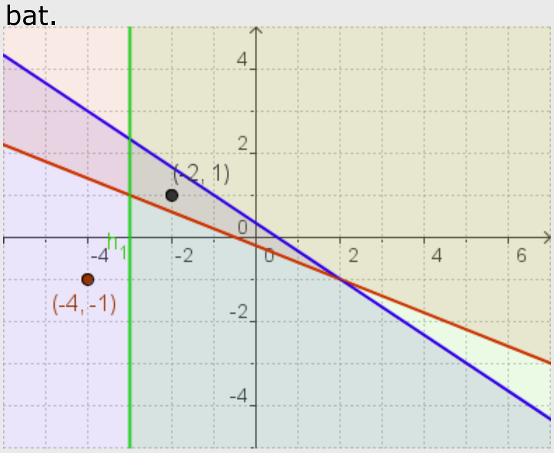
Ondoren, P-ren koordenatuak ordeztuko ditugu polinomioan eta desberdintasuna egiazkoa dela ikusiko dugu.

Hortaz, ebazpena P kokatuta dagoen erdiplanoa da, zuzena barne, desberdintasunaren sinboloa txikiagoa edo berdina baita.

7. Bila ezazu ea P(-4,-1) puntua inekuazio-sistemaren ebazpenetako bat den:

$$-2x-5y-1<0$$
$$2x+3y-1<0$$
$$-x-3<0$$

Marraz itzazu ebazpen guztiak eta, P ez badago horien artean, aurki ezazu badagoen bat.



Ikus itzazu marrazkian zer balio lortzen diren P-ren koordenatuak hiru polinomioetan ordeztean. Lortzen diren balioek azken bi inekuazioak betetzen dituzte, baina ez lehenengoa. Hortaz, P ez da sistemaren ebazpenetako bat.

Ebazpenak zuzen gorriaren gainetik (1), zuzen urdinaren azpitik (2) eta zuzen berdearen eskuinaldetik (3) dauden puntuak dira. Hau da, hiru zuzenak mugatzen duten triangeluaren barruko puntu guztiak.

Ebazpen posibleetako bat Q (-2,1) da.

4. Problemak inekuazioekin

Planteamendua eta ebazpena

Inekuazioetako problema bat ebazteko hurrengo urratsei jarraitu behar diegu:

1. **Aldagaiak esleitzea:** termino ezezagunei izena eman.
2. **Planteamendua:** datu ezagun eta ezezagunen artean erlazioak egin, inekuazio bat edo gehiago planteatuz (lehen edo bigarren mailakoak, ezezagun batekin edo batzuekin).
3. **Ebazpena:** azaldutako metodoetatik, aplikatu gure planteamenduari egokitzen zaiona.

Ardo-saltzaile batek bi ardo mota ditu biltegian: bata 4€/l-ko eta bestea 7€/l-ko. Nahastu egin nahi ditu 500 litroko upela betetzeko, eta nahasketak litroko 5 eta 6€artean balio izatea nahi du. Igar ezazu zein belioren artean egon behar duen lehen ardo motako litro kopuruak nahasketaren azken prezioa nahi den tartean egon dadin.

ALDAGAI ESLEIPENA:
x=lehen motako litro kopurua
500-x=bigarren motako litro kopurua

PLANTEAMENDUA:
$4x+7(500-x)>5\cdot500$
$4x+7(500-x)<6\cdot500$

EBAZPENA:
$4x+3500-7x>2500 \rightarrow -3x>-1000$
$\rightarrow x<\frac{1000}{3}=333,3...$
$4x+3500-7x<3000 \rightarrow -3x<-500$
$\rightarrow x>\frac{500}{3}=166,6...$

EBAZPENA:
x-k edozein balio har dezake 167 eta 333 litro artean.

Ebatzitako ARIKETAK

1. problema

Pentsu-fabrikatzaile batek pentsu jakin baten tona bat lortu nahi du, ondoren, 0,21 €/kg saltzeko. Pentsu hori lortzeko, dauzkan bi pentsu-mota nahastuko ditu. Pentsu horien prezioa 0,24 €/kg eta 0,16 €/kg da, hurrenez hurren.

1) Kalkula ezazu nahasketa horretan pentsu merkeenetik gutxienez zenbat jarri behar duen dirurik ez galtzeko.
2) Mota bakoitzetik zenbat jarri behar du nahasketan gutxienez 0,03 €/kg irabazi nahi badu?

Aldagaiak esleitzea: x=mota merketik jarri beharreko kg kop. 1000-x: mota merketik

Planteamendua: Nahasketaren kostua: $0,16x+0,24(1000-x)$
Dirudik ez galtzeko, ondorengoa bete behar du: $0,16x+0,24(1000-x)\le0,21\cdot1000$
Gutxienez 0,03 €/kg irabazteko, honelakoa izan behar du: $0,16x+0,24(1000-x)\le0,18\cdot1000$

Ebazpena: a) $-0,08x\le-30 \rightarrow x\ge30/0,08 \rightarrow x\ge375$ kg
b) $-0,08x\le-60 \rightarrow x\ge60/0,08 \rightarrow x\ge750$ kg

2. problema

Liburutegi batek 600 €-ko aurrekontua du argitaratu berri diren bi eleberriren aleak erosteko. Lehenengoaren ale bakoitzak 25 € balio du eta bigarrenaren ale bakoitzak 30 €. Bakoitzetik zenbat ale eros daitezke? Irudika ezazu problema inekuazio-sistema gisa, irudika ezazu grafikoki, eta adieraz itzazu zenbait ebazpen posible.

x=1.aren ale-kop. y: 2.aren ale-kop.

Planteamendua: $25x+30y\le600 \quad x>0 \quad y>0$

Ebazpena: Itzala duen eremuan balio osoak dituen edozein puntu da problemaren ebazpena. Puntua zuzenean baldin badago, erabat egokitzen da aurrekontura.
Adibidez, x=10, y=10 edo x=6, y=15.

Praktikatzeko

1. Balio absolutuko inekuazioak.
Ebatz itzazu ondoko inekuazioak:

a) $|x+6| < 1$

b) $|-x-4| \leq 4$

c) $|-2x-1| > 3$

d) $|2x-4| \geq 5$

2. Bigarren mailako inekuazioak.
Ebatz itzazu ondoko inekuazioak:

a) $2x^2 -x+2 \leq 0$

b) $-2x^2 +6x+1 \leq 0$

c) $-x^2 +7x-9 \geq 0$

d) $(x - 8)(x - 1) < 0$

3. Inekuazio arrazionalak.

Ebatz itzazu ondoko inekuazioak:

a) $\dfrac{x+4}{1-x} < 0$

b) $\dfrac{2x+4}{3+x} > 0$

c) $\dfrac{3x-5}{2x+1} \leq 0$

d) $\dfrac{x+4}{1-x} \geq 0$

4. Bi ezezaguneko inekuazioak.
Ebatz itzazu ondoko sistemak:

a) $\left.\begin{array}{r} -3x < 1 \\ -4x-3y > 4 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 3x-y < 2 \\ -5x+4y > 0 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} -4x-y < 4 \\ -5x-4y > 4 \end{array}\right\}$

AZALPENA ETA ADIBIDEA

Lehenengo gaian ikusi geneuen bi zenbaki errealen, [x-y], arteko kenduraren balio absolutua zenbaki horiek irudikatzen dituzten puntuen arteko distantzia kalkulatzearen parekoa dela.

Maiz halako problemak aurkitzen dira, eta horrelakoetan beharrezkoa da aldez aurretik finkatutako balio bat baino handiagoa edo txikiagoa duten puntu guztien puntu finko baterako distantzia kalkulatzea. Kasu hauetan problema inekuazio hauetako bat ebaztea da:

$$|x-a|<b,\ |x-a|\leq b,\ |x-a|>b,\ |x-a|\geq b$$

x eta a ren arteko distantzia b baino txikiagoa izateak esan nahi du (a-b,a+b)tarte barruan dagoela, beraz, x >a-b eta, era berean, x < a+b,

[x-a]<b ondoko sistemaren baliokidea da $\left.\begin{array}{l} x-a > -b \\ x-a < b \end{array}\right\}$ **eta**

[x-a]≤ b ondoko sistemaren baliokidea da $\left\{\begin{array}{l} x-a \geq -b \\ x-a \leq b \end{array}\right\}$

x eta a-ren arteko distantzia b baino handiagoa izateak esan nahi du x (a-b,a+b) tartetik kanpo dagoela, beraz, x < a-b edo x> a+b, beraz,

$$|x-a|>b$$

Inekuazioaren ebazpenak x-a< -b –ren ebazpen guztiak dira;

$$|x-a|\leq b$$

Inekuazioaren ebazpen guztiak x-a≤ b eta x-a≥ b-ren ebazpen guztiak dira.

Ikus ezazu kasu hauetan ez dela inekuazio sistema bat, baizik eta bien ebazpen guztiak

AZALPENA:

Inekuazio arrazional esaten diegu mota honetako inekuazioen baliokideei:

$$\frac{ax+b}{cx+d}<0 \quad ó \quad \frac{ax+b}{cx+d}\leq 0$$

Inekuazio hauen zailtasuna honetan datza: ez dakigu cx+d positiboa edo negatiboa den eta, beraz, ezin dugu izendatzailea besterik gabe kendu. Horregatik, inekuazio mota hauek ebazteko, lehendabizi inekuazioen bi sistematara aldatu behar ditugu, kontuan hartuta, zatidura negatiboa izan dadin, izendatzailea negatiboa bada zenbakitzaileak positiboa izan behar duela, eta alderantziz:

Hala, $\dfrac{ax+b}{cx+d}<0$ **Inekuazioa ondoko sistema-pareen baliokidea da:**

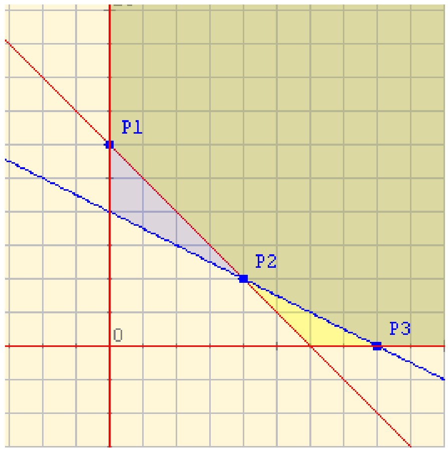
$$\left\{\begin{array}{l} ax+b>0 \\ cx+d<0 \end{array}\right\} \quad ó \quad \left\{\begin{array}{l} ax+b<0 \\ cx+d>0 \end{array}\right\}$$

Horiek ezagutzen ditugun prozeduren bidez ebazten dira eta hasierako inekuazioaren ebazpenak bi sistemetako ebazpenen bildura dira.

Gehiago jakiteko

Zertarako balio dute inekuazioek?

Inekuazioen erabilgarritasun nagusietako bat **erabaki problemetan** duen aplikazioa da. Egoera bat programatzean datza, aukera **hoberena** hartzeko helburuarekin. Oro har, **hobetzeko** prozesua, planteatutako problemari dagokion neurrian, **gehiengo** edo **gutxiengo** emaitza lortzean datza. Begira iezaiozu erantsitako adibideari.



ABEREAK GIZENTZEKO DIETAREN PROGRAMAZIOA

Dieta bat programatu nahi da, bi elikagairekin, A eta B.

A elikagaiaren unitate batek 500 kaloria ditu; B unitate batek 500 kaloria eta 20 gramo proteina ditu. Dietak egunean, gutxienez, 3000 kaloria eta 80 gramo proteina hartzea eskatzen du. A unitatearen prezioa 8 bada eta B unitatearena 12. Zenbat A eta B unitate erosi behar da dietaren eskakizunak gutxiengo kostuan betetzeko?

Ondoko eskemak bakoitzaren unitateak modu ordenatuan erakusten ditu.

	A	B	minimoa
Kaloriak	500	500	3000
Proteinak	10	20	80
Prezioa	8	12	**?**

Horrela: **x** A elikagaiaren unitate-kopurua. **y** B elikagaiaren unitate-kopurua. Horren arabera, $500x + 500y >= 3000$ inekuazioak kaloriei dagokien mugapena edo baldintza da.Era berean, $10x + 20y >= 80$ proteina-kantitateari lotutako mugapena da. Gainera, ondorengoak ere bete behar dira: $x >= 0$ eta $y >= 0$, A edo B elikagai-kantitateak ezin baitu inola ere negatiboa izan.

Berdez margoturiko esparrua planteaturiko inekuazioen ebazpen-multzoen elkargunea da eta **ebazpen egingarrien esparrua** deitzen da, bertako edozein puntutako koordenatuek jarritako mugapenak betetzen dituzte eta.

Baina elikagaien prezio posiblea ez da oraindik kontuan hartu. x eta y A eta B elikagaien kopuruak baldin badira, hurrenez hurren, eta salneurriak 8 eta 12 badira, orduan **kostu funtzioa** hau da: $\mathbf{F = 8x + 12y}$. Froga daiteke funtzio hau hobetzen dela, kasu honetan balio minimo bat hartuz, grafikoan erpin bati dagozkion x eta y balio horietarako.

Erpinak	**Kostu funtzioaren balioa**
(0,6) x = 0; y = 6	F = 8 x 0 + 12 x 6 = 72
(4,2) x = 4; y = 2	F = 8 x 4 + 12 x 2 = 32 + 24 = 56
(8,0) x = 8; y = 0	F = 8 x 8 + 12 x 0 = 64

F kostu funtzioaren hiru balioetatik, minimoa 56 da. Balioak x = 4 eta y = 2 dira, hau da, A unitateetatik 4 eta B unitateetatik 2.

A eta B kopuru horiek planteatutako beharren araberako kaloriak eta proteinak ematen dituzte.
A-ren 4 unitate: 4 x 500 = 2.000 kaloria B-ren 2 unitate: 2 x 500 = 1.000 kaloria Guztira = 3.000 kaloria A-ren 4 unitate: 4 x 10 = 40 gramo proteina B-ren 2 unitate: 2 x 20 = 40 gramo proteina
Guztira= 80 gramo proteina

Hau lortzeko gutxiengo kostua 56 da.
Kopuru honekin A elikagaiaren 4 unitate eta B elikagaiaren 2 unitate eros daitezke.

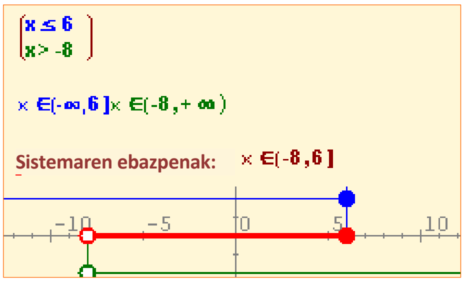
Gogora ezazu garrantzitsuena

Ezezagun bateko inekuazioak

Ebazpenak tarte moduan adierazten dira, irekita desberdintasunak hertsiak badira (<, >), eta itxita, bestela (<=, =>).

Inekuazioak bi ezezagunekin

Ebazpenak erdiplanoak dira eta modu grafikoan ebazten dira.



Bigarren mailako inekuazioak

Pueden Sistema gisa edo modu grafikoan ebatz daitezke, irudikatzen duen parabolak X ardatza mozten duen eta gorantza edo beherantza zabaltzen den igarriz.

Inekuazio baliokideak

Inekuazio baten bi kideei kopuru bera batzen bazaie inekuazio baliokide bat lortzen da:

x < y <===> x+a < y+a

Inekuazio baten bi kideak kopuru beraz, ez nuloa, biderkatzen badira, inekuazio baliokidea lortzen da **(baina kontuz zeinuarekin):**

a>0 ==> (x < y <===> ax < ay)

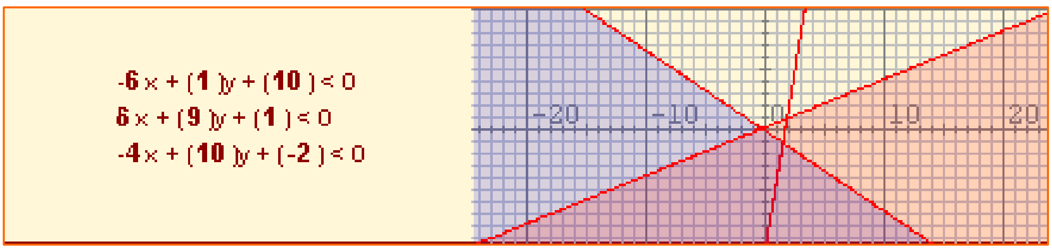
a<0 ==> (x < y <===> ax > ay)

Sistemak ezezagun batekin

Inekuazio bakoitza banaka ebazten da. Sistemako ebazpenak komunak dira guztiekin.

Bi ezezaguneko sistemak

Inekuazio bakoitza banaka ebazten da. Sistemaren ebazpenak komunak dira guztiekin. Modu grafikoan ebazten dira.



Autoebaluazioa

1. Ebatz ezazu ondoko inekuazioa: $\frac{-2x-4}{3} < 0$

2. Pieza higikor bat lerro zuzenean mugitzen da, 69 m/s eta 84 m/s arteko abiaduran. Hamar ordu eta gero, irteeratik zein distantziara dago pieza higikorra?

3. Ebatz ezazu ondorengo sistema $\left.\begin{matrix} x < 5 \\ x \geq 2 \end{matrix}\right\}$.

4. Ebatz ezazu ondorengo sistema $\left.\begin{matrix} x > 5 \\ x \geq 2 \end{matrix}\right\}$.

5. Ebatz ezazu ondorengo inekuazioa: $-2x^2 - 16x - 32 \geq 0$

6. Ebatz ezazu ondorengo inekuazioa $-2x^2 + 14x - 20 \geq 0$

7. Erantsitako irudia ondorengo inekuazioaren bigarren mailako polinomioaren grafikoa da $-2x^2 + 5x + 2 < 0$. Zehaztu zein den bere ebazpen-multzoa.

a) Ez du ebazpenik
b) Zenbaki erreal guztiak
c) Tarte mugatu bat
d) Bi tarte infinituen bildura

8. Zehaztu ondoko irudietatik zeinek irudikatzen duen x < y inekuazioaren ebazpen-multzoa:

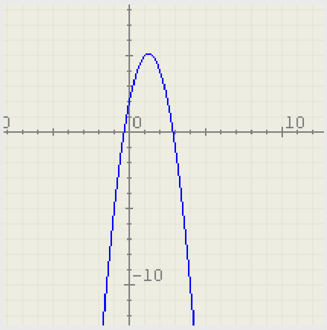
9. Zehaztu bi ezezagunen inekuazio-sistema horietatik zeinek duen irudi hau ebazpen-multzo gisa:

a) x<-2 y<3
b) x<-2 y>3
c) x>-2 y<3
d) x>-2 y>3

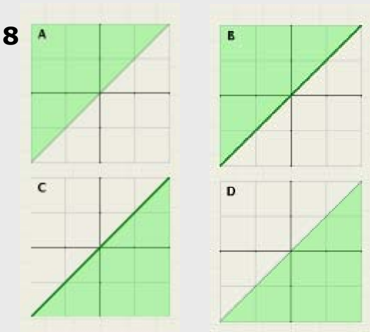
10. Zehaztu bi ezezagunen inekuazio-sistema horietatik zeinek duen irudi hau ebazpen-multzo gisa:

a) x>-2 y>3 x+y>6
b) x<-2 y>3 x+y<6
c) x>-2 y<3 x+y<6
d) x>-2 y>3 x+y<6

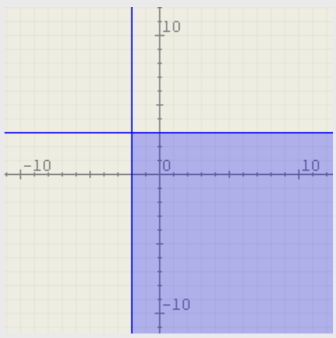
7



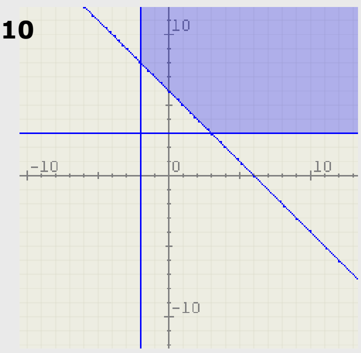
8



9



10



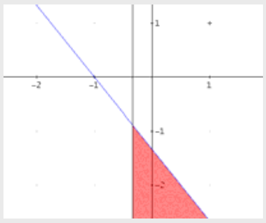
Praktikatzeko ariketen ebazpenak

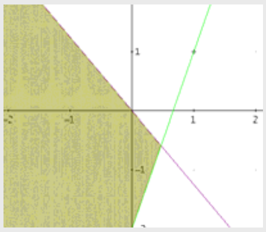
1) Balio absolutuko inekuazioak:
   a. (-7,-5)
   b. [-8,0]
   c. (-∞,-1)U(1,+ ∞)
   d. (-∞,-1/2]U[9/2,+ ∞)

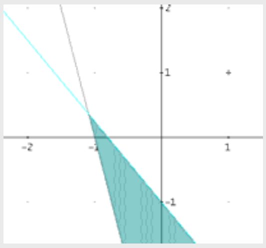
2) 2. mailako inekuazioak:
   a. Ez du ebazpenik
   b. (-∞,-0’16]U[3’16,+ ∞)
   c. [1’7,5’3]
   d. (1,8)

3) Inekuazio arrazionalak
   a. (-∞,-4)U(1,+ ∞)
   b. (-∞,-3)U(-2,+∞)
   c. (-1/2,5/3]
   d. [-4,1)

4) 2 ezezaguneko inekuazioak:

a. 

b. 

c. 

AUTOEBALUAZIOAREN ebazpenak

1. (-2,+ ∞)
2. 2484 eta 3024 km artean
3. [2,5)
4. (5,+ ∞)
5. {-4}
6. (-∞ ,2) U (5,+ ∞)
7. D erantzuna
8. A erantzuna
9. C erantzuna
10. A erantzuna

Ez ahaztu jarduerak tutoreari bidaltzea